Les Non des éleves
- Marieme | Elemin Val
- Oumoukelthoum | sidi md
- Khdeije | sidi

7C1

Ecoles ERRAJA

G : A3

Nombres Complexes

Ex1 :

$z_1 = (2-2i)^5$

$|z_1| = |2-2i|^5 = (2\sqrt{2})^5$

$\arg_{z_1} = \arg(2-2i)^5$

$= 5\arg(2-2i)$

$= 5\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5\pi}{4}$

$\boxed{\Rightarrow \arg z_1 = \frac{3\pi}{4}}$

alors $z_1 = (2\sqrt{2})^5 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_1 = (2\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= (2\sqrt{2})^5\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$z_1 = -\frac{(2\sqrt{2})^5}{\sqrt{2}} + \frac{(2\sqrt{2})^5}{\sqrt{2}}i$

$z_2 = \frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}} = (1-i\sqrt{3})^{-10}$

$|z_2| = |1-i\sqrt{3}|^{-10} = 2^{-10}$

$\arg_{z_2} = -10\arg(1-i\sqrt{3})$

$= -10\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$

$\boxed{\arg_{z_2} = \frac{4\pi}{3}}$

$z_2 = 2^{-10}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$= 2^{-10}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{-2^{-10}}{2} - i\cdot 2^{-10}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = -2^{-11} - 2^{-11}i\sqrt{3}$

$z_3 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)}}{2e^{\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

$|z_3| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg z_3 = \frac{7\pi}{12}$

$z_3 = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{1+3}$

$z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

$z_4 = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$; $|z_4| = 1$ Car du type $\frac{u}{\bar{u}}$

$z_4 = \frac{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}+i)}{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}+i)}$

$= \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})i - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$= \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})i}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$= \frac{2(1+\sqrt{2})+2(1+\sqrt{2})i}{(1+\sqrt{2})^2+1}$

$= \frac{2(1+\sqrt{2})}{(2\sqrt{2})^2+1}(1+i) \Rightarrow \arg z_4 = \frac{\pi}{4}$

Car du type $a(1+i)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

$z_4 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_5 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$

$z_5 = \left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\right)^4$

1

$$=\left((2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})+2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)^4$$

$$=\left(2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}\right)^4$$

$$=\left(2\sqrt{2}(1+i)\right)^4=\left(2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$$

$$z_5=\left(4e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4=256\,e^{i\pi}$$

$$|z_5|=256;\ \arg z_5=\pi$$

$$z_5=-256$$

$$z_6=\frac{(-2i)(1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^4}$$

$$z_6=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}\times\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{12}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}$$

$$z_6=\frac{2e^{-\frac{i\pi}{2}}.2^{12}.e^{i4\pi}}{(\sqrt{2})^4.e^{i\pi}}$$

$$z_6=\frac{2^{13}.e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2^2.e^{i\pi}}$$

$$z_6=2^{11}.e^{-\frac{i3\pi}{2}}$$

$$z_6=2^{11}.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$|z_6|=2^{11},\ \arg z_6=\frac{\pi}{6}$$

$$z_6=2^{11}.i$$

2

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Les Nom des élèves
- Marieme / Elemin Val
- Oumoukelthoum / Sidi md
- Khdeija / Sidi

G : A_3

Nombres Complexes

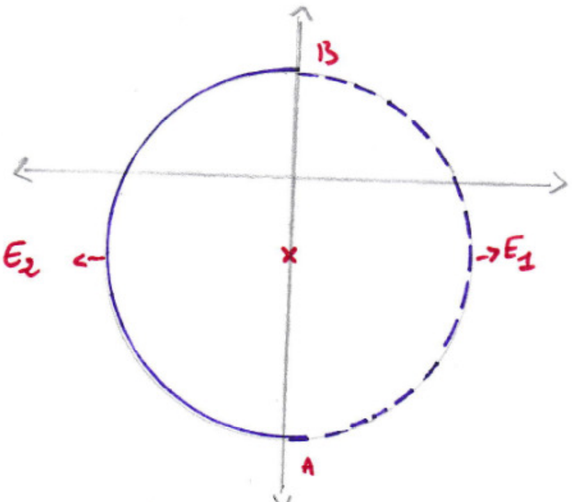
Solution :

1) $\arg\left(\frac{z+2i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

$A(-2i)$; $B(i)$

$\Rightarrow (\vec{MB}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

L'ensemble c'est le demie Cercle de diamètre [AB] privé de A et B



2) $\arg \frac{z+2i}{z-2i} = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{z+2i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou

L'ensemble c'est le Cercle de diamètre [AB] privé des A et B

3) $\arg\left(\frac{z+1-2i}{z-1-3i}\right) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$

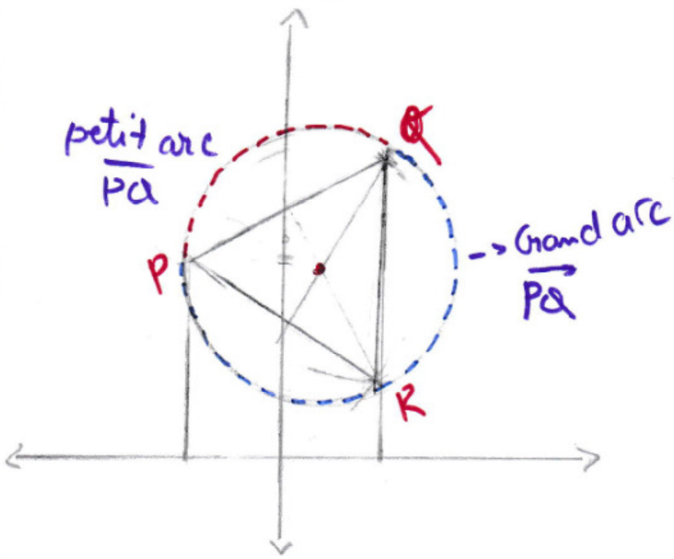
On Pose : $P(-1+2i)$; $Q(1+3i)$ ①

Exo 4 :

$(\vec{MQ} ; \vec{MP}) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$

$\Rightarrow (\vec{MQ} ; \vec{MP}) = \frac{\pi}{3}$ ou

$(\vec{MQ} ; \vec{MP}) = -\frac{2\pi}{3}$

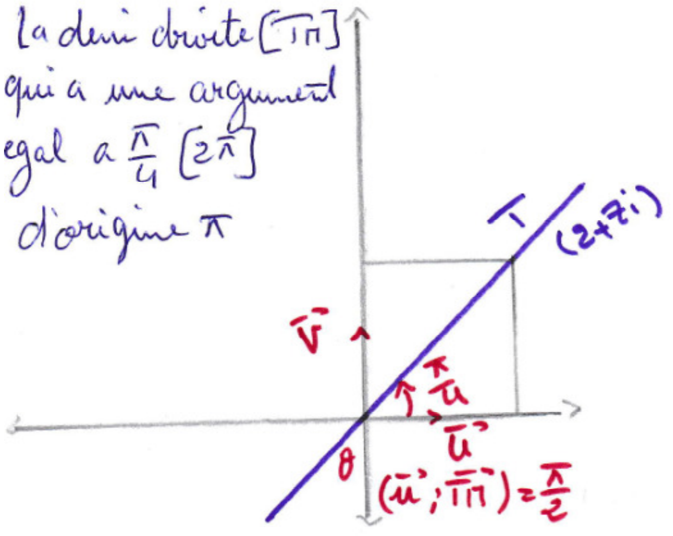


L'ensemble c'est le Cercle Circonscrit au triangle PQR équilatéral indirect privé de P et Q

4) $\arg(z-2-2i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ l'ensemble c'est le demi droite passant par T (A de T) (la demi bissectrice)

(bissectrice au Tangente)

la demi droite [TП) qui a une argument egal a $\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ d'origine π



la caracteur station analytique de l'ensemble $\begin{cases} x = y \\ x > 2 \end{cases}$

2

Nom des élèves
- Marieme / Elemin Val
- Oumoukelthoum / Sidi md
- Khdija / sidi

G : A_3

Nombre Complexes

Exo 27

Solution :

1) $z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$

l'équat° admet une solut° réelle

$\alpha^3-(6+3i)\alpha^2+(21+19i)\alpha-26-26i=0$

$\alpha^3-6\alpha^2+21\alpha-26+(-3\alpha^2+19\alpha-26)i=0$

On résout le système :

$$\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+21\alpha-26=0 & (1)\\ -3\alpha^2+19\alpha-26=0 & (2)\end{cases}$$

D'après (2) on trouve $\alpha_1=2, \alpha_2=\frac{13}{3}$

En remplaçant dans (1) on trouve que $\alpha_1=2$ vérifie (1) et $\alpha_2=\frac{13}{3}$ ne vérifie pas (1). Alors $z_0=2$

- On pose $p(z)=z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$

	1	$-6-3i$	$21+19i$	$-26-26i$
2		2	$8-6i$	$26+26i$
	1	$-4-3i$	$13+13i$	0

Alors : $p(z)=(z-2)(z^2+(-4-3i)z+13+13i)$

- **Résolvons l'équat° :**

$z^2-(4+3i)z+13+13i=0$

$\Delta=(4+3i)^2-52-52i=-45-28i$

par le calcul on obtient une racine carré $\delta=2-7i$

Les racines de l'équat° du second degré

$z_1=\frac{4+3i+2-7i}{2}=3-2i$; $z_2=\frac{4+3i-2+7i}{2}=1+5i$

- Ensemble des solut°

$S=\{2, 3-2i, 1+5i\}$

2) $z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$

E admet une solut° $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha^3-(11+2i)\alpha^2+2(17+7i)\alpha-42=0$

$$\begin{cases}\alpha^3-11\alpha^2+34\alpha-42=0 \Rightarrow \alpha=7\\ -2\alpha^2+14\alpha=0 \quad \alpha=0 \text{ ou } \alpha=7\end{cases}$$

$z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=$

$(z-7)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz$

$$\begin{cases}a-7=-11-2i \Rightarrow a=-4-2i\\ b-7a=2(17+7i) \Rightarrow b=7a+34+14i=6\\ -7b=-42 \Rightarrow b=6\end{cases}$$

$z^2-(4+2i)z+6=0$

$\Delta=(4+2i)^2-24$

$=12+16i-24$

$=-12+16i$

1

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -12 \\ ab = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 + 4i$$

$$z_1 = \frac{4 + 2i + 2 + 4i}{2} = 3 + 3i$$

$$z_2 = \frac{4 + 2i - 2 - 4i}{2} = 1 - i$$

$$S = \{7,\ 3 + 3i,\ 1 - i\}$$

les Nom des élèves
- Marieme/Elemin Val
- Oumoukelthoum/sidimd
- Khdeija/sidi

G : A3

Nombres Complexes
Exo : 7 Bis

Solution :

E admet une solut° imaginaire pure

$(1+i)z^3+2z^2+(-1+5i)z+10+10i=0$

$(1+i)(i\alpha)^3+2(i\alpha)^2+(-1+5i)(i\alpha)+10+10i=0$

$-i(1+i)\alpha^3-2\alpha^2+(-5-i)\alpha+10+10i=0$

$$\begin{cases} \alpha^3-2\alpha^2-5\alpha+10=0 \\ -\alpha^3-\alpha+10=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=2$$

$\Rightarrow z_0=2i$

$$\begin{array}{r|l} (1+i)z^3+2z^2+(-1+5i)z+10+10i & z-2i \\ \hline \underline{(1+i)z^3+(2-2i)z^2} & (1+i)z^2+2iz+(-5+5i) \\ 2iz^2+(-1+5i)z & \\ \underline{2iz^2+4z} & \\ (-5+5i)z+10+10i & \\ \underline{(-5+5i)z+10+10i} & \\ 0 & \end{array}$$

$(1+i)z^2+2iz+(-5+5i)=0$

$\Delta=-4-4(1+i)(-5+5i)$

$=-4-4(-5+5i-5i-5)$

$=-4-4(-10)=36$

$\sqrt{\Delta}=6$

Nom des élèves
- Marieme/Eleui Val
- Oumoukelhoum/sidi md
- Khdeija/sidi

G : A_3

Nombres Complexes

Exo : 10

Solution :

$z = e^{i\frac{\pi}{7}}$

① $\alpha = z + z^2 + z^4$

$\bar{\alpha} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4$

Rappele :

* Si $z = e^{i\theta}$, alors $|z| = 1$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$

On remarque que $z^7 = 1$

Car $z^7 = \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = e^{i2\pi}$

On a $\bar{z} = \frac{1}{z} = \frac{z^7}{z} = z^6$

$\bar{z}^2 = \frac{1}{z^2} = \frac{z^7}{z^2} = z^5$

$\bar{z}^4 = \frac{1}{z^4} = \frac{z^7}{z^4} = z^3$

Alors $\bar{\alpha} = z^6 + z^5 + z^3$

$\alpha + \bar{\alpha} = z + z^2 + z^4 + z^6 + z^5 + z^3$

$1 + \alpha + \bar{\alpha} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

$1 + \alpha + \bar{\alpha} = \frac{1 - z^7}{1 - z} \Rightarrow 1 + \alpha + \bar{\alpha} = 0$

D'ou $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

$\alpha\bar{\alpha} = \left|z + z^2 + z^4\right|\left(z^6 + z^5 + z^3\right)$

$= z^7 + z^6 + z^4 + z^8 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7$

$z^8 = z \cdot z^7 = z$, $z^9 = z^2 \cdot z^7 = z^2$

et $z^{10} = z^3 \cdot z^7 = z^3$

Donc $\alpha\bar{\alpha} = 2 + 4$

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

$\alpha\bar{\alpha} = 2$

② On a : $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^4$

$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$

$\alpha = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)$

$Re(\alpha) \cdot \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \Rightarrow Re(\alpha) = -\frac{1}{2}$

D'ou $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

Alors $\alpha = -\frac{1}{2} + iy$ avec

$y = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

On a $\alpha\bar{\alpha} = 2 \Rightarrow |\alpha|^2 = 2 \Rightarrow$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

On a $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

Alors $\sin\frac{8\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{7}$ et

$y = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$

a fonction $\sin\theta$ est croissante et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Alors $\sin\frac{2\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{8} \Rightarrow$

①

$\Rightarrow \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} > 0$

Comme $\sin \frac{4\pi}{7} > 0$

On a alors $y > 0$ donc

$y = \frac{\sqrt{7}}{2}$

2

Non des élèves
- Marieme / Elemin Val
- Oumou Kelthoum / sidi md
- Khdeija / sidi

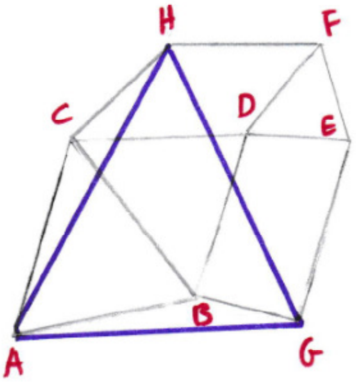
Zc1

G : A3

Nombres Complexes

Exo : 13

Solution :



1) ABC est équilatéral direct :

$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

DEF est équilatéral direct :

$\Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$

2) EDBG est un parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = b+e-d$

DCHF est un parallélogramme $\Rightarrow h-c = f-d$

$\Rightarrow h = c+f-d$

3) On Calcule $\frac{h-a}{g-a}$

$g-a = b-a+e-d$, $h-a = c-a+f-d$

$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$

$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d) \Rightarrow h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$

$\frac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow$ AGH est équilatéral direct.

Les nom des élèves :
- Marieme / Elemin Val
- Oumoukelhoum / Sidimd
- Khdeija / Sidi

7C1

G : A3

Nombres Complexes

Exo : 16

Solution :

Soit A, B et C les points d'affixes a, aj et aj^2

On Pose :

$z_A = a$, $z_B = aj$, $z_C = aj^2$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{aj^2 - a}{aj - a} = \frac{a(j^2-1)}{a(j-1)} = \frac{a(j-1)(j+1)}{a(j-1)}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = j + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$$

Alors ABC est équilatéral direct.

Rappel : le nombre noté j tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine cubique de l'unité. On a :

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$, $\bar{j} = \frac{1}{j} = j^2$

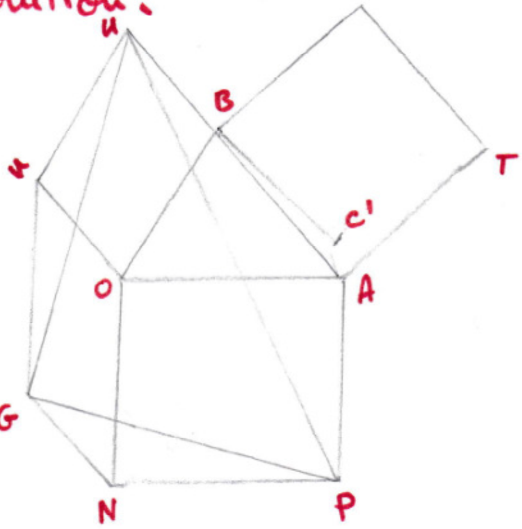
Non des élèves
- Mariene) Elemin Val
- Oumoukelhoum |Sid med
- khdeija |sidi

$G : A_3$

Nombre Complexes

Exo : 19

Solution :



1) les affixes de A et U

Comme le triangle **ONA** est rectangle en O isocele et direct. On a donc

$\frac{Z_A - Z_O}{Z_N - Z_O} = i$ Ca dire $\frac{a-0}{N-0} = i$

$\Rightarrow \frac{a}{n} = i \Rightarrow a = ni$

De même : OBU est rectangle en O isocele et direct : On a donc

$\frac{Z_U - Z_O}{Z_B - Z_O} = i$ Ca dire $\frac{u-0}{B-0} = i$

$\Rightarrow \frac{u}{b} = i \Rightarrow i = ib$

2) **Mq :** $AU = BN$ et $(AU) \perp (BN)$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{AU}) = \arg\left(\frac{u-a}{n-b}\right) = \arg\left(\frac{ib - in}{n-b}\right) \\ = \arg\left(\frac{i(b-n)}{(n-b)}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \frac{AU}{BN} = \left|\frac{u-a}{n-b}\right| = \left|\frac{i(b-n)}{(n-b)}\right| = |-i| = 1 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} (BN) \perp (AU) \\ \text{et} \\ BN = AU \end{cases}$ ①

La rotation de Centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme O en P et T en B d'ou

$\begin{cases} BP = OT \\ \text{et} \\ (BP) \perp (OT) \end{cases}$

de même : la rotation de Centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme A en I et C en O

d'ou $\begin{cases} OI = CA \\ \text{et} \\ (OI) \perp (CA) \end{cases}$

3) Mq : **GPC** est rectangle et isocele direct

$\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{UO} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{UA}$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{UA} \\ (GP) \parallel (UA) \end{cases}$ ②

de même $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GU} + \overrightarrow{UC} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{NB}$

$\Rightarrow \begin{cases} GC = NB \\ \text{et} \\ (GC) \parallel (NB) \end{cases}$ ③

donc, (1), (2) et (3) même :

$\begin{cases} GP = GC \\ \text{et} \\ (GP) \perp (GC) \end{cases}$ donc le triangle **GPC** est rectangle et isocele

4-a) l'image de G par la rotation :

$rot(G) = r(t(G)) = r(N) = A$ d'ou $rot(G) = A$

①

b) Comme le triangle **OBC** est rectangle en B isocele direct, et Comme C' est le symetrique de **C** par rapport à **B**, le triangle **OBC'** est donc rectangle en B isocele indirect

Donc triangle **OCC'** est rectangle en **O** isocele et direct d'ou $\boxed{r(C')=C}$

$rot(B)=r(t(B))=r(C')=C \quad rot(B)=C$

c) Mq : $AC=GB$ et $AC \perp GB$

rot est Composées d'une translations d'une rotat° d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'ou rot est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Or $rot(G)=A$ et $rot(B)=C$

d'ou $\begin{cases} AC=GB \\ (\vec{GB}),(\vec{AC})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

donc $\begin{cases} AG=GB \\ \text{et} \\ (\vec{AC})\perp(\vec{GP}). \end{cases}$